A Transformada de Fourier

Definição

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

A Transformada de Fourier

Definição

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Relação com a transformada de Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega} = X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega)$$

A Transformada de Fourier

Definição

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Relação com a transformada de Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega} = X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{$\mathcal{F}\{x(t)\}$ só pode ser calculada pela definição quando $s = j\omega \in$ à RC de $X(s)$}}$

Condição suficiente para convergência de $X(j\omega)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \quad (x(t) \text{ é absolutamente integrável})$$

OBS:
Existem funções não absolutamente integráveis para as quais podemos encontrar a expressão de $X(j\omega)$

Transformada inversa

Resultados necessários da teoria das distribuições

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \phi(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega = 2\pi\delta(t)$$

Transformada inversa

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$(\times\, e^{j\omega t}) \quad X(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\, d\omega$$

Trocando a ordem de integração

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega\right]}_{2\pi\,\delta(t-\tau)} d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega}$$

Observações

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Representação de $x(t)$ como uma soma infinita de exponenciais complexas

$\left[X(j\omega)\frac{d\omega}{2\pi}\right] e^{j\omega t}$ Exponenciais com energias infinitesimais

- $X(j\omega)$ tem interpretação de espectro em frequência de $x(t) \to$ mostra como a energia de $x(t)$ está distribuída "em frequência"
- $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\theta_X(\omega)}$

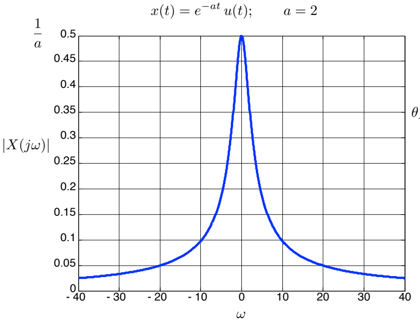
A representação espectral de $x(t)$ é normalmente expressa em módulo e fase

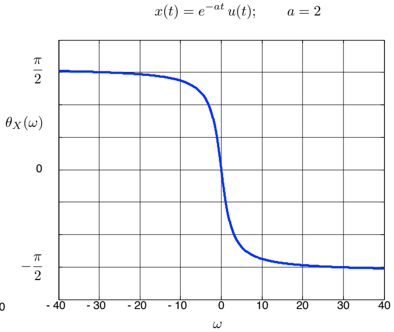
Exemplo

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a \quad \Rightarrow s = j\omega \in RC$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}\, e^{j\theta_X(\omega)}, \quad \theta_X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$





Propriedades

Linearidade: Se

$$x_i(t) \leftrightarrow X_i(j\omega) \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Então

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \, x_i(t) \leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} a_i \, X_i(j\omega)$$

Deslocamento no tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) = x(t - t_0) \leftrightarrow Y(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \, X(j\omega)$$

- Deslocamento no tempo afeta apenas a fase de $X(j\omega)$
- Atraso linear de fase corresponde a atraso constante no tempo

Simetria

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$$

Simetria

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-j\omega)$$

Consequências:

Se $x(t)$ é real $\rightarrow x^*(t) = x(t)$

$$\Rightarrow \boxed{X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad \text{para } x(t) \text{ real}}$$

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad \text{para } x(t) \text{ real}$$

- Expressando $X(j\omega)$ como

$$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\ \text{Im}\{X(j\omega)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} \text{Re}\{X(-j\omega)\} = \text{Re}\{X(j\omega)\} \Rightarrow \text{Re}\ \{X(j\omega)\} \text{ é par} \\ \text{Im}\{X(-j\omega)\} = -\text{Im}\{X(j\omega)\} \Rightarrow \text{Im}\{X(j\omega)\} \text{ é ímpar} \end{array}}$$

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) \quad \text{para } x(t) \text{ real}$$

- Expressando $X(j\omega)$ como

$$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\ \text{Im}\{X(j\omega)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{r} \text{Re}\left\{X(-j\omega)\right\} = \text{Re}\left\{X(j\omega)\right\} \Rightarrow \text{Re}\left\{X(j\omega)\right\} \text{ é par} \\ \text{Im}\left\{X(-j\omega)\right\} = -\text{Im}\left\{X(j\omega)\right\} \Rightarrow \text{Im}\left\{X(j\omega)\right\} \text{ é ímpar} \end{array}}$$

- Expressando $X(j\omega)$ como

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\theta_X(\omega)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{lr} |X(-j\omega)| = |X(j\omega)| & \Rightarrow |X(j\omega)| \text{ é par} \\ \theta_X(-\omega) = -\theta_X(\omega) & \Rightarrow \theta_X(\omega) \text{ é impar} \end{array}}$$

Diferenciação no tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow Y(j\omega) = j\omega\, X(j\omega)$$

Escalonamento no tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) = x(at) \leftrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} X\left(j\,\frac{\omega}{a}\right)$$

Consequências:

a) Contração no tempo $\leftrightarrow$ Expansão em frequência
   Expansão no tempo $\leftrightarrow$ Contração em frequência

Consequências:

a) Contração no tempo $\leftrightarrow$ Expansão em frequência
Expansão no tempo $\leftrightarrow$ Contração em frequência

b)

$$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$$

$\Rightarrow$ Se $x(t)$ é REAL E PAR

$$\text{REAL:} \quad x(t) = x^*(t) \rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

$$\text{PAR:} \quad x(t) = x(-t) \rightarrow X(j\omega) = X(-j\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(j\omega) \text{ é REAL e PAR}}$$

$\Rightarrow$ Se $x(t)$ é REAL E ÍMPAR

$$\text{REAL:} \quad x(t) = x^*(t) \rightarrow X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

$$\text{ÍMPAR:} \quad x(t) = -x(-t) \rightarrow X(j\omega) = -X(-j\omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(j\omega)\text{ é IMAGINÁRIA e ÍMPAR}}$$

c) Juntando as propriedades acima e lembrando que

$$x(t) = \text{Par}\{x(t)\} + \text{Ímpar}\{x(t)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x(t)\text{ real} \leftrightarrow X(j\omega) \\ \text{Par}\{x(t)\} \leftrightarrow \text{Re}\{X(j\omega)\} \\ \text{Ímpar}\{x(t)\} \leftrightarrow j\,\text{Im}\{X(j\omega)\} \end{array}}$$

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
x(t) = e^{-a|t|} &= e^{at}\,u(-t) + e^{-at}\,u(t) \\
&= x_1(-t) + x_1(t) \\
&= x_2(t) + x_1(t)
\end{aligned}
$$

$$
X_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \qquad X_2(j\omega) = X_1(-j\omega) = \frac{1}{-j\omega + a}
$$

Assim,

$$
X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
$$

Deslocamento em frequência

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = X[j(\omega - \omega_0)]$$

$$\Rightarrow x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\Big\{X[j(\omega + \omega_0)] + X[j(\omega - \omega_0)]\Big\}$$

Deslocamento em frequência

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = X[j(\omega - \omega_0)]$$

$$\Rightarrow x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\Big\{X[j(\omega + \omega_0)] + X[j(\omega - \omega_0)]\Big\}$$

Dualidade

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi\, x(-\omega)$$

Relação de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega$$

Como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt =$ Energia de $x(t)$

$\Rightarrow |X(j\omega)|^2$: Densidade espectral de energia

- Especifica a quantidade de energia por banda de frequência

Convolução

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega)Y(j\omega)$$

Convolução

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(j\omega)Y(j\omega)$$

Integração no tempo

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi\, X(j0)\, \delta(\omega)$$

Demonstração:

Como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = x(t) * u(t)$$

$\Rightarrow$ Como (a ser mostrado mais tarde)

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega}\, X(j\omega) + \pi\, \underbrace{X(j\omega)\, \delta(\omega)}_{X(j0)\, \delta(\omega)}$$

Multiplicação no tempo

$$
\begin{aligned}
x(t) \leftrightarrow &\quad X(j\omega) \\
y(t) \leftrightarrow &\quad Y(j\omega) \\
r(t) = x(t)y(t) \leftrightarrow &\quad R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y\big[j(\omega-\theta)\big]\,d\theta \\
&\quad = \frac{1}{2\pi}\Big[X(j\omega) * Y(j\omega)\Big]
\end{aligned}
$$

Funções Singulares e Espectros Discretos

- Já vimos como obter as expressões das transformadas de Fourier para sinais absolutamente integráveis
- Na prática precisamos saber o espectro de frequências de alguns sinais não absolutamente integráveis
- Usando funções singulares podemos representar os espectros de diversos sinais importantes e não absolutamente integráveis

Impulso unitário $\quad x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

Consequências:

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

Usando a expressão da transformada inversa,

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t)\, d\omega$$

$\nearrow$

Estas integrais só fazem sentido quando interpretadas como distribuições, não como funções

Exponencial complexa: $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

Como
$$\begin{aligned} \delta(t) &\leftrightarrow 1 \\ 1 &\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) && \text{(dualidade)} \\ e^{j\omega_0 t} &\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) && \text{(deslocamento em frequência)} \end{aligned}$$

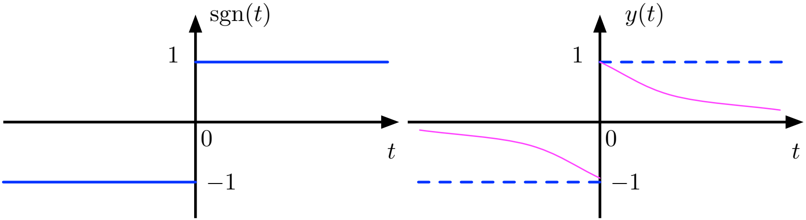
Assim,

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] \leftrightarrow \pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right] \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

Função Sinal $\quad x(t) = \mathsf{sgn}(t)$

$$\begin{aligned}\mathsf{sgn}(t) &= \lim_{a\to 0}[-e^{at}u(-t) + e^{-at}u(t)], \qquad a \geq 0 \\ &= \lim_{a\to 0} y(t), \qquad a \geq 0\end{aligned}$$



$$Y(j\omega) = -\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = -\frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$X(j\omega) = \lim_{a \to 0} Y(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

$$\boxed{\mathsf{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}}$$

Degrau unitário $\quad x(t) = u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathsf{sgn}(t)$$

$$\boxed{U(j\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

Aplicando o limite:

- A função $\mathrm{sgn}(t)$ tem valor médio igual a zero
- A função $u(t)$ tem valor médio $M_u = 1/2$

$$u_a(t) = e^{-at}u(t) \qquad \text{e} \qquad u(t) = \lim_{a\to 0} u_a(t)$$

$$\begin{aligned}
U(j\omega) &= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} u_a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[u_a(t) - \frac{1}{2}\right]}_{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)} e^{-j\omega t}\, dt + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt}_{2\pi\,\delta(\omega)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{j\omega}\right) + \pi\,\delta(\omega) \\
&= \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)
\end{aligned}$$

Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

a) Um sinal periódico tem duração eterna $(-\infty < t < \infty)$

$\Rightarrow$ Pode sempre ser escrito como:

$$x(t) = \underbrace{x(t)\,u(t)}_{\text{parte causal}} + \underbrace{x(t)\,u(-t)}_{\text{parte anti-causal}} = x_{\mathrm{c}}(t) + x_{\mathrm{a}}(t)$$

Transformada de Fourier de Sinais Periódicos

a) Um sinal periódico tem duração eterna $(-\infty < t < \infty)$

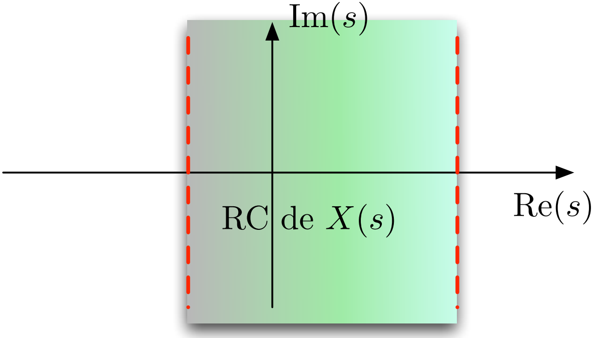
$\Rightarrow$ Pode sempre ser escrito como:

$$x(t) = \underbrace{x(t)\,u(t)}_{\text{parte causal}} + \underbrace{x(t)\,u(-t)}_{\text{parte anti-causal}} = x_{\mathrm{c}}(t) + x_{\mathrm{a}}(t)$$

- Para que
  - i) $X(s)$ tenha região de convergência
  - ii) $x(t)$ seja absolutamente integrável

$$\begin{cases} \text{Polos de } X_{\mathrm{c}}(s) \Rightarrow \text{no SPLE do plano } s \\ \text{Polos de } X_{\mathrm{a}}(s) \Rightarrow \text{no SPLD do plano } s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Polos de } X_{\mathrm{c}}(s) \Rightarrow \text{ no SPLE do plano } s \\ \text{Polos de } X_{\mathrm{a}}(s) \Rightarrow \text{ no SPLD do plano } s \end{cases}$$



- Com este tipo de região de convergência, as componentes $x_\mathrm{c}(t)$ e $x_\mathrm{a}(t)$ podem ser

    i) Exponenciais decrescentes com $|t|$

    ii) Senóides exponencialmente amortecidas com $|t|$

$\Rightarrow$ Em nenhum dos dois casos $x(t)$ poderá ser periódica

- Com este tipo de região de convergência, as componentes $x_{\mathrm{c}}(t)$ e $x_{\mathrm{a}}(t)$ podem ser

  i) Exponenciais decrescentes com $|t|$

  ii) Senóides exponencialmente amortecidas com $|t|$

$\Rightarrow$ Em nenhum dos dois casos $x(t)$ poderá ser periódica

Para $x(t)$ periódica, todos os polos de $X_{\mathrm{c}}(s)$ e de $X_{\mathrm{a}}(s)$ devem estar sobre o eixo $s = j\omega$ para que $x(t)$ não seja amortecida quando $|t|$ cresce

$\Rightarrow X(s)$ não tem região de convergência

- Com este tipo de região de convergência, as componentes $x_{\mathrm{c}}(t)$ e $x_{\mathrm{a}}(t)$ podem ser

    i) Exponenciais decrescentes com $|t|$

    ii) Senóides exponencialmente amortecidas com $|t|$

$\Rightarrow$ Em nenhum dos dois casos $x(t)$ poderá ser periódica

Para $x(t)$ periódica, todos os polos de $X_{\mathrm{c}}(s)$ e de $X_{\mathrm{a}}(s)$ devem estar sobre o eixo $s = j\omega$ para que $x(t)$ não seja amortecida quando $|t|$ cresce

$\Rightarrow X(s)$ não tem região de convergência

$\Rightarrow$ Sinais períodicos não têm Transformada de Laplace

- Com este tipo de região de convergência, as componentes $x_{\mathrm{c}}(t)$ e $x_{\mathrm{a}}(t)$ podem ser

  i) Exponenciais decrescentes com $|t|$

  ii) Senóides exponencialmente amortecidas com $|t|$

$\Rightarrow$ Em nenhum dos dois casos $x(t)$ poderá ser periódica

Para $x(t)$ periódica, todos os polos de $X_{\mathrm{c}}(s)$ e de $X_{\mathrm{a}}(s)$ devem estar sobre o eixo $s = j\omega$ para que $x(t)$ não seja amortecida quando $|t|$ cresce

$\Rightarrow X(s)$ não tem região de convergência

$\Rightarrow$ Sinais períodicos não têm Transformada de Laplace

Como determinar uma expressão para a Transformada de Fourier de sinais periódicos?

b) Conforme os polos de $X_{\mathrm{c}}(s)$ e de $X_{\mathrm{a}}(s)$ tendem para o eixo $\mathrm{Re}\{s\} = 0$,

$x(t)$ tende para uma soma de exponenciais complexas

$$\Rightarrow \quad x_k(t) = c_k \, e^{\pm j\omega_k t} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

b) Conforme os polos de $X_\mathrm{c}(s)$ e de $X_\mathrm{a}(s)$ tendem para o eixo Re$\{s\} = 0$,

$x(t)$ tende para uma soma de exponenciais complexas

$$\Rightarrow \quad x_k(t) = c_k\, e^{\pm j\omega_k t} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

c) A soma de dois sinais periódicos com períodos T_1 e T_2, com $T_1 > T_2$ será periódica se e somente se $T_1 = KT_2$, com $K \in \mathbb{Q}^+$

b) Conforme os polos de $X_{\mathrm{c}}(s)$ e de $X_{\mathrm{a}}(s)$ tendem para o eixo Re$\{s\} = 0$,

$x(t)$ tende para uma soma de exponenciais complexas

$$\Rightarrow \quad x_k(t) = c_k\, e^{\pm j\omega_k t} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

c) A soma de dois sinais periódicos com períodos T_1 e T_2, com $T_1 > T_2$ será periódica se e somente se $T_1 = KT_2$, com $K \in \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow$ Um sinal periódico com período T_0 só poderá conter parcelas exponenciais com períodos T_k se existir um $T_0 = k\, T_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ para todos os k.

b) Conforme os polos de $X_{\rm c}(s)$ e de $X_{\rm a}(s)$ tendem para o eixo Re$\{s\} = 0$,

$x(t)$ tende para uma soma de exponenciais complexas

$$\Rightarrow \quad x_k(t) = c_k\, e^{\pm j\omega_k t} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

c) A soma de dois sinais periódicos com períodos T_1 e T_2, com $T_1 > T_2$ será periódica se e somente se $T_1 = KT_2$, com $K \in \mathbb{Q}^+$

$\Rightarrow$ Um sinal periódico com período T_0 só poderá conter parcelas exponenciais com períodos T_k se existir um $T_0 = k\, T_k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ para todos os k.

Nesse caso,

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} : & \text{frequência fundamental} \\ \omega_k = k\,\omega_0 : & k\text{-ésima harmônica}, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Em geral, considerando todos os valores possíveis de $k \in \mathbb{Z}$ (valores de $k < 0$ são necessários para compor sinais reais).

Se $x(t)$ é periódico com período T_0 (Freq. Fund. $\omega_0 = 2\pi/T_0$)

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j\,k\,\omega_0 t}}$$

Em geral, considerando todos os valores possíveis de $k \in \mathbb{Z}$ (valores de $k < 0$ são necessários para compor sinais reais).

Se $x(t)$ é periódico com período T_0 (Freq. Fund. $\omega_0 = 2\pi/T_0$)

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\,k\,\omega_0 t}}$$

$\Rightarrow$ Expansão de $x(t)$ em série de Fourier

- c_0 é o valor médio do sinal
- c_1 e c_{-1} determinam a amplitude da componente na frequência fundamental
- c_k e c_{-k} determinam a amplitude da k-ésima harmônica

d) Transformada de Fourier de um sinal periódico

Se $x(t)$ é periódico, podemos representá-lo por sua série de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \, c_k \, \delta(\omega - k\,\omega_0)$$

- A transformada de Fourier de qualquer sinal periódico de frequência $\omega_0 = 2\pi/T_0$ é um trem de impulsos nas frequências $\omega_k = k\,\omega_0$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Cada impulso terá área igual a $2\pi|c_k|$, em que c_k são os coeficientes da expansão de $x(t)$ em série Fourier

Determinação dos coeficientes da série de Fourier

$x(t)$ Periódico com frequência $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

Multiplicando por $e^{-j\ell\omega_0 t}$ e integrando no período T_0

$$\int_{T_0} x(t) e^{-j\ell\omega_0 t} \, dt = \int_{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j(k-\ell)\omega_0 t} \, dt$$

Trocando a ordem do somatório e da integração

$$\int_{T_0} x(t)e^{-j\ell\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{T_0} e^{j(k-\ell)\omega_0 t}\,dt$$

$$\int_{T_0} e^{j(k-\ell)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} T_0, & k=\ell \\ \displaystyle\int_{T_0} e^{\pm j\,p\,\omega_0 t}\,dt,\, p\in\mathbb{Z}^+, & k\neq\ell \end{cases}$$

$$\int_{T_0} e^{\pm j\,p\,\omega_0 t} dt = \underbrace{\int_{T_0} \cos(p\,\omega_0 t)\,dt}_{\substack{\text{Int. de ``cos'' em}\\ \text{No. inteiro de períodos}}} \pm j \underbrace{\int_{T_0} \text{sen}(p\,\omega_0 t)\,dt}_{\substack{\text{Int. de ``sen'' em}\\ \text{No. inteiro de períodos}}} = 0$$

$\Rightarrow$ Usando apenas $k = \ell$

$$\int_{T_0} x(t)e^{-j\ell\omega_0 t}dt = T_0\, a_\ell$$

Resolvendo para a_ℓ e trocando ℓ por k

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

k-ésimo coeficiente da série de Fourier de $x(t)$

$\Rightarrow$ $x(t)$ periódico com frequência $\omega_0 = 2\pi/T_0$ rad$/s$

Expansão de $x(t)$ em série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

valor médio de $x(t)$
(componente DC)

Transformada de Fourier de $x(t)$ (espectro discreto)

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \, c_k \, \delta(\omega - k\omega_0)$$

FORMULÁRIO

1. **Integrais**

$\int udv = uv - \int vdu$

$\int e^{ax}\ dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

$\int xe^{ax}\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$

$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

$\int \frac{x}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$

$\int x^2e^{ax}\ dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2-2ax+2)$

$\int \text{sen}ax\ \text{sen}bx\ dx = \frac{\text{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\text{sen}(a+b)x}{2(a+b)},\ a^2 \neq b^2$

$\int x\,\text{sen}ax\ dx = \frac{1}{a^2}(\text{sen}ax - ax\cos ax)$

$\int \text{sen}ax\ \cos bx\ dx = -\left[\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}\right],\ a^2 \neq b^2$

$\int x\cos ax\ dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\,\text{sen}ax)$

2. **Transformadas de Fourier**

$e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega},\ a>0$

$e^{at}u(-t) \Leftrightarrow \frac{1}{a-j\omega},\ a>0$

$e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2},\ a>0$

$te^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2},\ a>0$

$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\text{sen}\omega_0 t \Leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

$u(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

$\text{rect}(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \tau\text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

$\frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi t} \Leftrightarrow X(j\omega) = u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)$

3. **Propriedades da Transformada de Fourier**

$kx(t) \Leftrightarrow kX(j\omega)$

$x_1(t)+x_2(t) \Leftrightarrow X_1(j\omega)+X_2(j\omega)$

$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega)$

$X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$x(t)e^{j\omega_o t} \Leftrightarrow X(j(\omega-\omega_0))$

$x_1(t)*x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$

$x_1(t)x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$

$\frac{d^n x}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

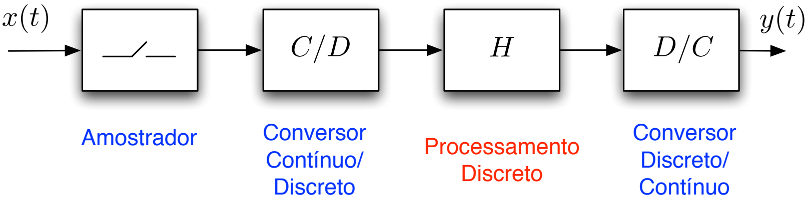
$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega$

Sinais e Sistemas Discretos e Amostrados

Amostragem de sinais contínuos

- Digitalização crescente de sistemas de comunicações, controle, instrumentação e processamento de sinais
- Grande parte do processamento $\rightarrow$ sistemas discretos ou amostrados
- Sinais físicos: contínuos em sua maioria
- Normalmente amostrados a intervalos regulares

- Processamento discreto ou amostrado de sinais contínuos

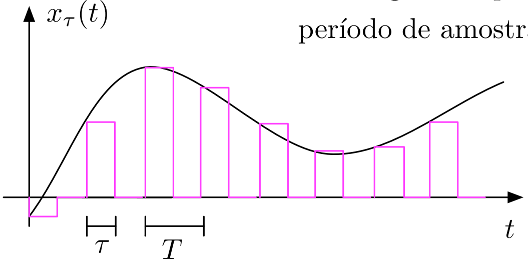


$\Rightarrow$ É importante entendermos o que ocorre com um sinal, e com as informações que ele contém, durante o processo de amostragem

O sinal amostrado

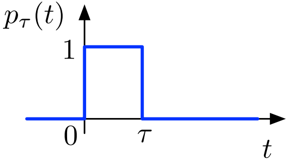
largura do pulso: τ

período de amostragem: T

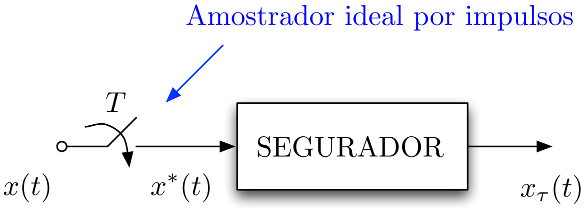


Modelagem matemática

$$x_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, p_\tau(t - nT), \quad p_\tau(t) = u(t) - u(t - \tau)$$



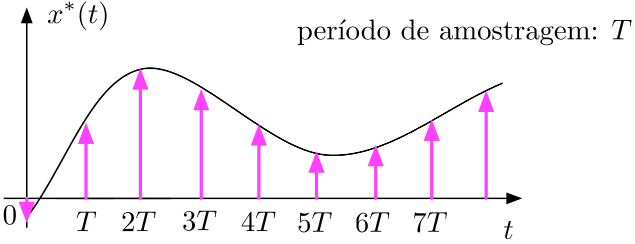
Modelagem que facilita a análise matemática



Amostrador-Segurador Sample-and-Hold (S/H)

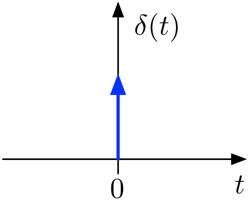
Amostrador por impulsos:

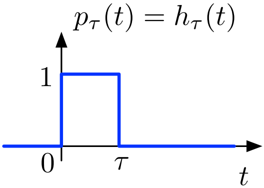
$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$



Segurador

É o sistema LIT que converte cada impulso em um pulso de largura τ e amplitude igual à área do impulso





$$\Rightarrow \quad h_\tau(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

$$\boxed{H_\tau(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s\tau}}{s} = \frac{1-e^{-s\tau}}{s}}$$

Função de transferência do segurador

Para um sinal $x(t)$ qualquer

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$

$$\Rightarrow X^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)\, e^{-st}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, e^{-snT}$$

$$\boxed{X^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, e^{-snT}}$$

Como

$$x_\tau(t) = x^*(t) * h_\tau(t) \rightarrow X_\tau(s) = X^*(s)\, H_\tau(s)$$

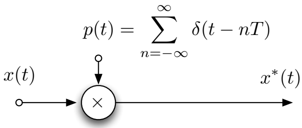
$$\boxed{X_\tau(s) = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, e^{-snT}}$$

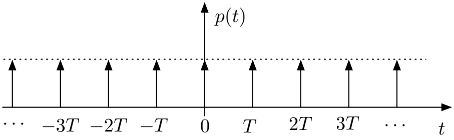
Interpretação no domínio da frequência

- Usando a transformada de Fourier (espectro em frequência) temos outra interpretação importante de $x^*(t)$
- $x^*(t)$ = Produto de $x(t)$ por um "trem de impulsos"

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT) = x(t) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)}_{p(t)}$$

em que $p(t)$ é periódico com período T





- Aplicando a transformada de Fourier

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big[X(j\omega) * P(j\omega)\Big]$$

- A transformada $P(j\omega)$ é obtida a partir dos coeficientes da série de Fourier de $p(t)$

Coeficientes da série de Fourier de $p(t)$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT), \qquad \text{frequência de amostragem } \omega_T = 2\pi/T$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)\, e^{-jk\omega_T t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_T t}\, dt = \frac{1}{T}$$

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_T t}, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T}}$$

Transformada de Fourier de $p(t)$

$$P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_T)$$

$$\Rightarrow \boxed{P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_T), \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T}}$$

Como

$$x^*(t) = x(t)\,p(t) \Rightarrow X^*(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big[X(j\omega) * P(j\omega)\Big]$$

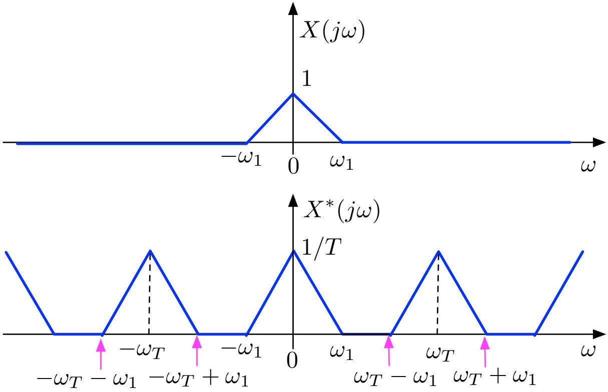
Assim,

$$\begin{aligned}
X^*(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\theta)P(\omega-\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\theta)\,\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\theta-k\omega_T)\,d\theta \\
&= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(\theta)\delta(\omega-\theta-k\omega_T)\,d\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big[(j(\omega-k\omega_T)\big]}$$

Repetição periódica do espectro de $x(t)$

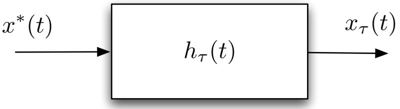
Exemplo



OBS:

1. Como recuperar $x(t)$ a partir de $x^*(t)$?
2. O que ocorre se $\omega_T < 2\,\omega_1$?

Segunda parte do processo de amostragem



$$H_\tau(s) = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s}$$

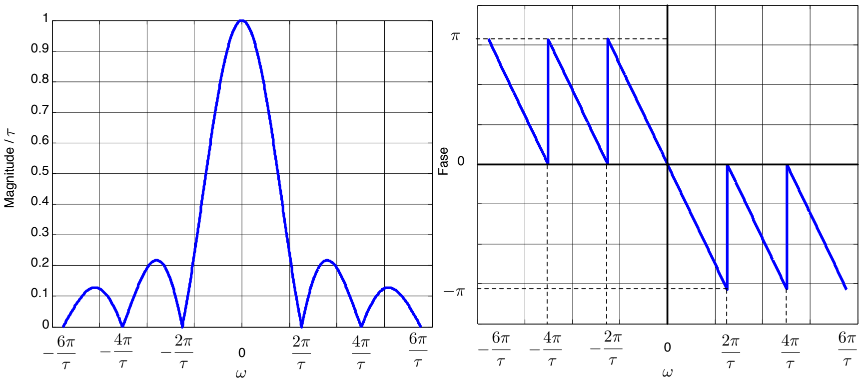
Para $s = j\omega$ (Note que $H_\tau(s)$ não tem polo em $s = 0$)

$$H_\tau(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = e^{-j\omega\tau/2}\left[\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega}\right] \times \left(\frac{2\tau}{2\tau}\right)$$

$$= \frac{\tau}{\omega\tau/2}\left[\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{2j}\right] e^{-j\omega\tau/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{H_\tau(j\omega) = \tau\left[\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right] e^{-j\omega\tau/2} = \tau\,\mathrm{sinc}(\omega\tau/2)\, e^{-j\omega\tau/2}}$$

$$H_\tau(j\omega) = \tau \left[\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right] e^{-j\omega\tau/2} = \tau\,\mathrm{sinc}(\omega\tau/2)\,e^{-j\omega\tau/2}$$



Saída do amostrador

$$\boxed{\begin{aligned} X_\tau(j\omega) &= X^*(j\omega)\, P(j\omega) \\ &= \underbrace{\frac{\tau}{T}\left[\frac{\mathrm{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}\right] e^{-j\omega\tau/2}}_{\substack{\text{Distorção de magnitude} \\ \text{e atraso introduzidos} \\ \text{por } h_\tau(j\omega)}} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left[j(\omega - k\omega_T)\right]}_{\text{Repetição periódica de } X(j\omega)} \end{aligned}}$$

OBS:

Maioria das implementações práticas: $\tau = T$

$$X_T(j\omega) = \text{sinc}\,(\omega T/2)\, e^{-j\omega T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\big[(j(\omega - k\omega_T)\big], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- A distorção máxima ocorre para $\tau = T$ e diminui com a redução da relação τ/T
- Fazendo $\tau < T$ perde-se energia do sinal amostrado o que pode levar a uma baixa relação sinal-ruído
- Se ω_m é a máxima frequência contida em um sinal

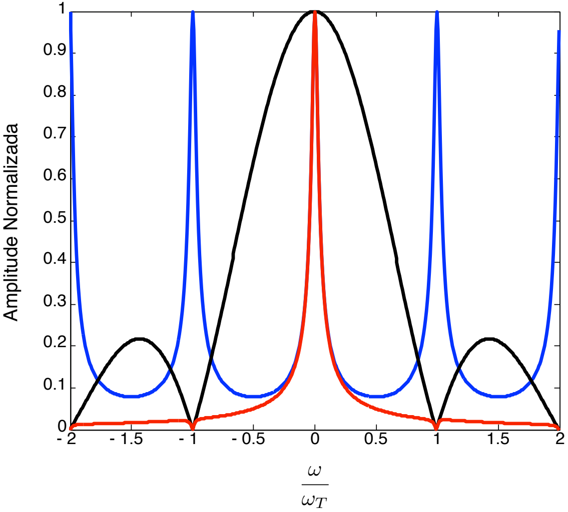
$$\text{Se} \quad |X(j\omega)| = 0 \quad \text{para} \quad |\omega| > \omega_m$$

Pode-se recuperar exatamente o sinal $x(t)$ a partir de suas amostras por impulsos usando um filtro passa-baixas ideal com banda passante limitada em $\frac{\omega_T}{2}$ se $\frac{\omega_T}{2} > \omega_m$

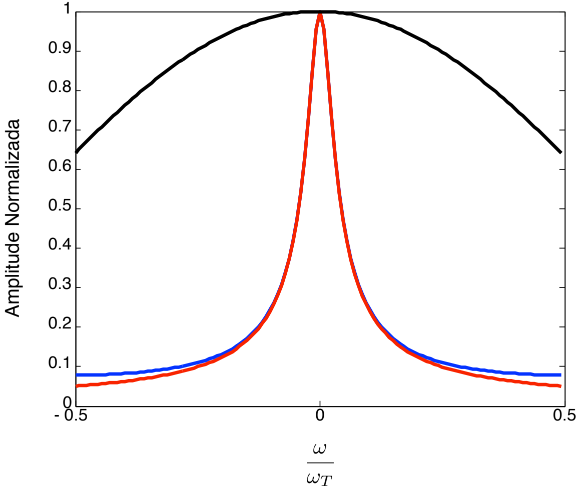
$$\Rightarrow \boxed{\omega_T > 2\omega_m} \quad \leftarrow \text{Teorema da amostragem}$$

Exemplo:

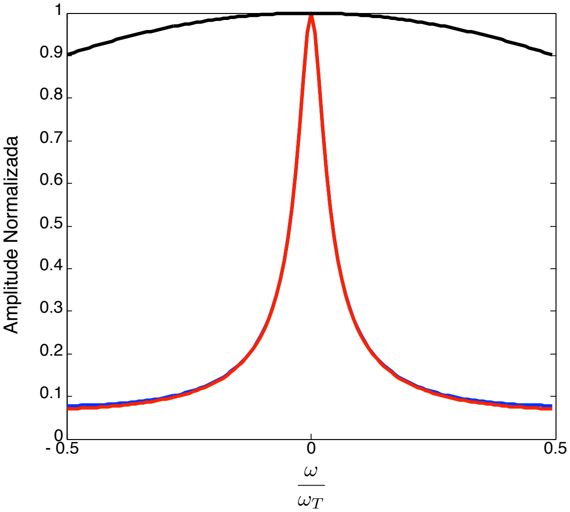
Sinal:	$x(t) = e^{-2t}\,u(t)$
Tempo de duração:	10 s
Período de amostragem:	$T = 10/128 = 0,0781$ s
Largura do pulso:	$\tau = T$



Detalhe da faixa $-\omega_T/2 < \omega < \omega_T/2$



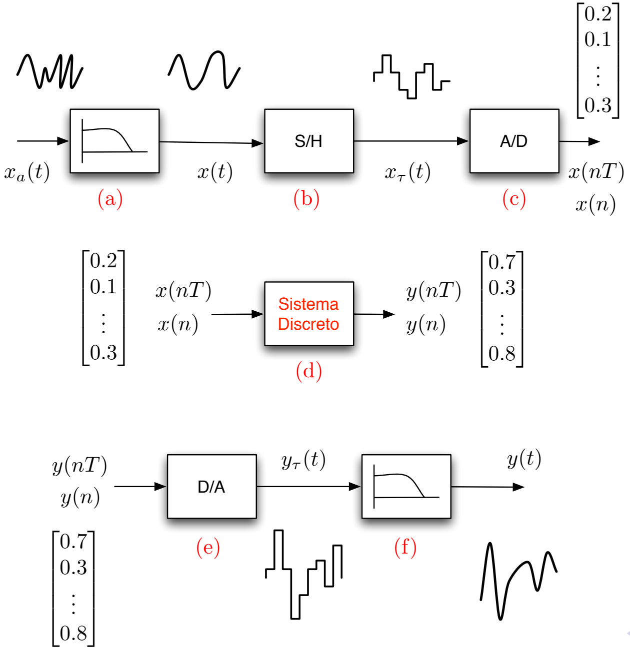
Detalhe da faixa $-\omega_T/2 < \omega < \omega_T/2$ para $\tau = T/2$



- Note que a distorção imposta por $H_\tau(s)$ só ocorre quando o sinal físico assume a forma de uma soma de pulsos
- Por causa do teorema de amostragem, há a necessidade de eliminarmos as componentes de frequência com $\omega > \omega_m$ "antes" da amostragem para evitar perda de informação na banda principal do sinal

$\Rightarrow$ Precisamos de um filtro passa-baixas antes da amostragem

Processamento Discreto de Sinais Contínuos



Função de cada bloco do sistema:

(a) Filtro passa-baixas anti-recobrimento (de espectro)

(b) Amostrador-segurador

(c) Conversor: sinal contínuo para sinal discreto

(d) Sistema de processamento de sinais discretos (sistema discreto)

(e) Conversor: sinal discreto para sinal contínuo

(f) Filtro passa-baixas interpolador

Obs:

1) Com τ suficiente em (c), o efeito de $H_\tau(s)$ não aparece espectro do sinal discreto $x(nT)$
2) O efeito de $H_\tau(s)$ é aplicado em (e), onde de fato os pulsos são introduzidos na informação