

Análise de Circuitos Elétricos

Circuitos elétricos podem ser analisados no domínio da transformada de Laplace

Análise de Circuitos Elétricos

Circuitos elétricos podem ser analisados no domínio da transformada de Laplace

- ▶ Determinar a equação diferencial e aplicar a transformada de Laplace (já estudado)

Análise de Circuitos Elétricos

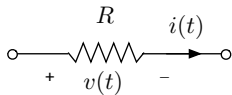
Circuitos elétricos podem ser analisados no domínio da transformada de Laplace

- ▶ Determinar a equação diferencial e aplicar a transformada de Laplace (já estudado)
- ▶ Analisar um circuito equivalente no domínio transformado
 - ▶ Substituir todas as variáveis de circuito por suas transformadas
 - ▶ Substituir todas as fontes por fontes "transformadas"
 - ▶ Substituir os elementos de circuito por seus equivalentes "transformados"

Transformação dos Elementos de Circuito

Resistores

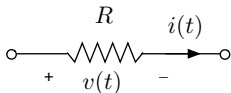
$$v(t) = R i(t)$$



Transformação dos Elementos de Circuito

Resistores

$$v(t) = R i(t)$$



Aplicando a transformada de Laplace “unilateral” ou “bilateral”

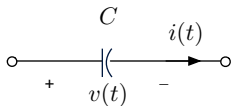
$$V(s) = R I(s)$$

$$Z_R(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R \rightarrow \text{impedância}$$

$$Y_R(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R} \rightarrow \text{admitância}$$

Capacitâncias

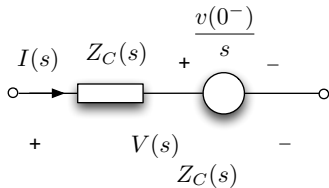
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$



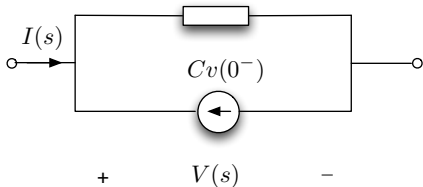
Aplicando a transformada de Laplace unilateral

$$I(s) = C [sV(s) - v(0^-)]$$

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$



$$I(s) = sC V(s) - C v(0^-)$$



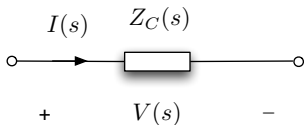
$$Z_C(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \Big|_{v(0^-)=0} = \frac{1}{sC} \rightarrow \text{impedância}$$

$$Y_C(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \Big|_{v(0^-)=0} = sC \rightarrow \text{admitância}$$

Aplicando a transformada de Laplace bilateral

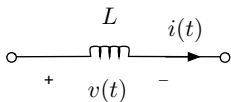
$$I(s) = sC V(s) = Y_C(s)V(s)$$

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) = Z_C(s)I(s)$$



Indutâncias

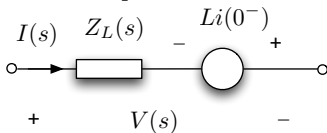
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



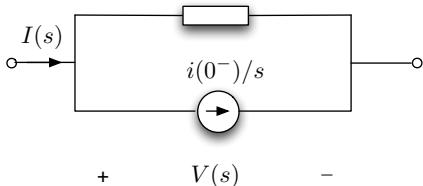
Aplicando a transformada de Laplace unilateral

$$V(s) = L [s I(s) - i(0^-)]$$

$$V(s) = sL I(s) - L i(0^-)$$



$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$



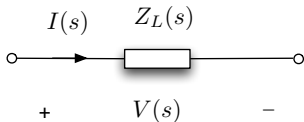
$$Z_L(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \Big|_{i(0^-)=0} = sL \rightarrow \text{impedância}$$

$$Y_L(s) = \frac{I(s)}{V(s)} \Big|_{i(0^-)=0} = \frac{1}{sL} \rightarrow \text{admitância}$$

Aplicando a transformada de Laplace bilateral

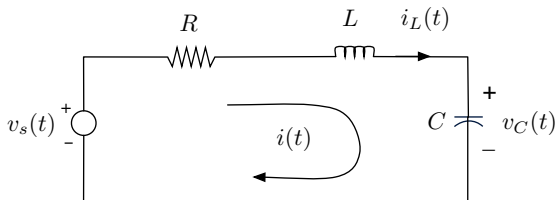
$$V(s) = sL I(s) = Z_L(s)I(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL} V(s) = Y_L(s)V(s)$$

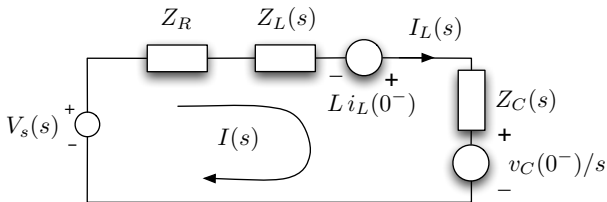


Exemplo:

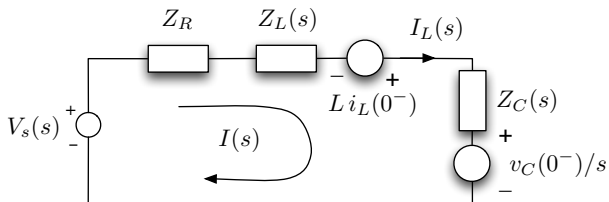
Determine $i(t)$ para $t \geq 0$ no circuito abaixo sabendo que $v_C(0^-) = V_0 = 10 \text{ V}$, $i_L(0^-) = I_0 = 2 \text{ A}$, $C = \frac{1}{5} \text{ F}$, $L = 1 \text{ H}$, $R = 2\Omega$, e que $v_s(t) = 5e^{-2t} \cos(3t)u(t)$



Circuito Equivalente no Domínio s

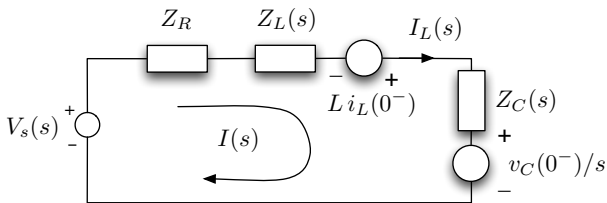


Análise



$$\left[Z_R + Z_C(s) + Z_L(s) \right] I(s) = V_s(s) + L i_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}$$

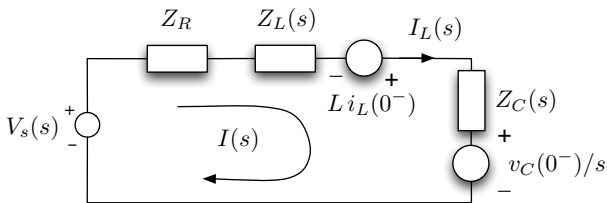
Análise



$$\left[Z_R + Z_C(s) + Z_L(s) \right] I(s) = V_s(s) + L i_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}$$

$$Z_R + Z_C(s) + Z_L(s) = R + \frac{1}{sC} + sL = \frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC}$$

Análise



$$\left[Z_R + Z_C(s) + Z_L(s) \right] I(s) = V_s(s) + L i_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}$$

$$Z_R + Z_C(s) + Z_L(s) = R + \frac{1}{sC} + sL = \frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC}$$

$$V_s(s) = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2 + 9}$$

$$I(s) = \frac{\overbrace{sC}^{H(s)}}{s^2LC + sRC + 1} V_s(s) + \frac{(sLI_0 - V_0)\cancel{C}}{\cancel{C}(s^2LC + sRC + 1)}$$

$$I(s) = \frac{\overbrace{sC}^{H(s)}}{s^2LC + sRC + 1} V_s(s) + \frac{(sLI_0 - V_0)\cancel{C}}{\cancel{C}(s^2LC + sRC + 1)}$$

Substituindo valores numéricos e $V_s(s)$

$$I(s) = \frac{5s(s+2)}{(s^2 + 2s + 5)[(s+2)^2 + 9]} + \frac{2s - 10}{s^2 + 2s + 5}$$

$$I(s) = \frac{\overbrace{sC}^{H(s)}}{s^2LC + sRC + 1} V_s(s) + \frac{(sLI_0 - V_0)C}{s^2LC + sRC + 1}$$

Substituindo valores numéricos e $V_s(s)$

$$I(s) = \frac{5s(s+2)}{(s^2 + 2s + 5)[(s+2)^2 + 9]} + \frac{2s - 10}{s^2 + 2s + 5}$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{5s(s+2)}{[(s+1)^2 + 4][(s+2)^2 + 9]}}_{\substack{\text{modos naturais} \quad \text{modos forçados} \\ \text{Resp. ao estado zero } \{I_1(s)\}}} + \underbrace{\frac{2s - 10}{(s+1)^2 + 4}}_{\substack{\text{modos naturais} \\ \text{Resp. à entrada zero } \{I_2(s)\}}}$$

Resposta ao Estado Zero

$$I_1(s) = \frac{5s(s+2)}{[(s+1)^2+4][(s+2)^2+9]} = \frac{K_1s+K_2}{(s+1)^2+4} + \frac{K_3s+K_4}{(s+2)^2+9}$$

$$K_1 = 0,962$$

$$K_2 = 1,923$$

$$K_3 = -0,962$$

$$K_4 = 5$$

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{0,962s + 1,923}{(s+1)^2 + 4} - \frac{0,962s - 5}{(s+2)^2 + 9} \\ &= \frac{0,962(s+1)}{(s+1)^2 + 4} + 0,4805 \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \\ &\quad - \frac{0,962(s+2)}{(s+2)^2 + 9} + 2,308 \frac{3}{(s+2)^2 + 9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1(s) &= \frac{0,962s + 1,923}{(s+1)^2 + 4} - \frac{0,962s - 5}{(s+2)^2 + 9} \\
 &= \frac{0,962(s+1)}{(s+1)^2 + 4} + 0,4805 \frac{2}{(s+1)^2 + 4} \\
 &\quad - \frac{0,962(s+2)}{(s+2)^2 + 9} + 2,308 \frac{3}{(s+2)^2 + 9}
 \end{aligned}$$

Como o sistema é causal e $v_s(t) = 0$ para $t < 0$,

$$\begin{aligned}
 i_1(t) = & 0,962 e^{-t} \cos(2t) u(t) + 0,4805 e^{-t} \text{sen}(2t) u(t) \\
 & - 0,962 e^{-2t} \cos(3t) u(t) + 2,308 e^{-2t} \text{sen}(3t) u(t)
 \end{aligned}$$

Resposta à entrada zero

$$I_2(s) = \frac{2s - 10}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{2(s + 1)}{(s + 1)^2 + 4} - 6 \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}$$

$$i_2(t) = 2 e^{-t} \cos(2t) u(t) - 6 e^{-t} \text{sen}(2t) u(t)$$

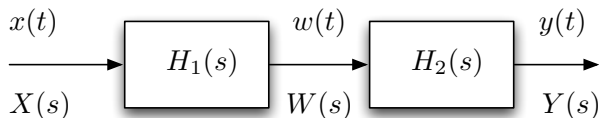
Resposta completa

$$i(t) = 2,962 e^{-t} \cos(2t) u(t) - 7,4425 e^{-t} \text{sen}(2t) u(t) \leftarrow \text{R. natural} \\ - 0,962 e^{-2t} \cos(3t) u(t) + 2,308 e^{-2t} \text{sen}(3t) u(t) \leftarrow \text{R. forçada}$$

Representação de Sistemas por Diagramas de Blocos

- ▶ Decomposição de sistemas grandes em interconexão de sistemas menores
- ▶ Os subsistemas menores podem ser mais facilmente projetados e testados

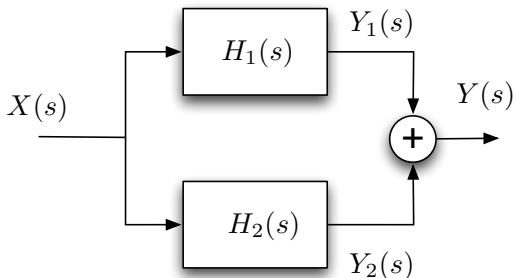
Conexão série



$$\left. \begin{aligned} W(s) &= H_1(s)X(s) \\ Y(s) &= H_2(s)W(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(s) = H_1(s)H_2(s)X(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = H_1(s)H_2(s)}$$

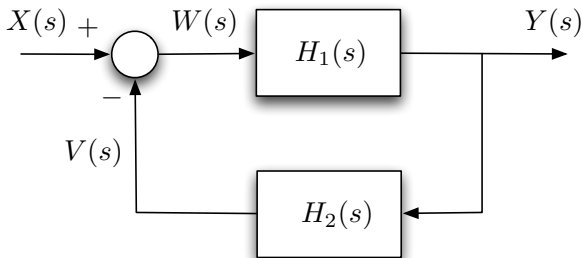
Conexão paralela



$$\left. \begin{array}{l} Y_1(s) = H_1(s)X(s) \\ Y_2(s) = H_2(s)X(s) \end{array} \right\} \Rightarrow Y(s) = [H_1(s) + H_2(s)] X(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = H_1(s) + H_2(s)}$$

Conexão retroalimentada



$$Y(s) = H_1(s)W(s)$$

$$W(s) = X(s) - V(s)$$

$$V(s) = H_2(s)Y(s)$$

$$W(s) = X(s) - H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)X(s) - H_1(s)H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}X(s)$$

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

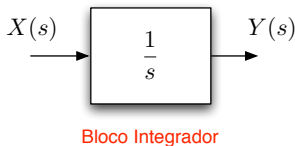
Obs: Este tipo de conexão permite mover polos de $H_1(s)$

Realizações de Sistemas

- ▶ Blocos diferenciadores são problemáticos
- ▶ Implementações usam preferencialmente blocos integradores

▶

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$
$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$



Forma Direta I

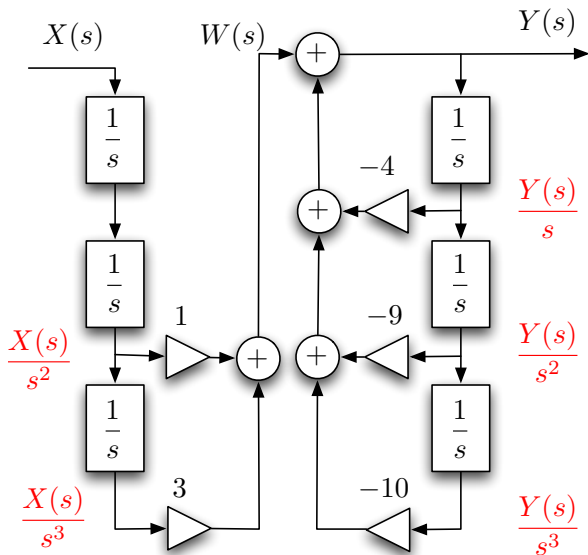
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{s^3 + 4s^2 + 9s + 10}$$

dividendo por s^3

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\frac{1}{s^2} + 3 \frac{1}{s^3}}{1 + 4 \frac{1}{s} + 9 \frac{1}{s^2} + 10 \frac{1}{s^3}} \\ &= \left[\frac{1}{s^2} + 3 \frac{1}{s^3} \right] \left[\frac{1}{1 + 4 \frac{1}{s} + 9 \frac{1}{s^2} + 10 \frac{1}{s^3}} \right] = H_1(s) H_2(s) \end{aligned}$$

$$H_1(s) = \frac{W(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2} + 3 \frac{1}{s^3}$$

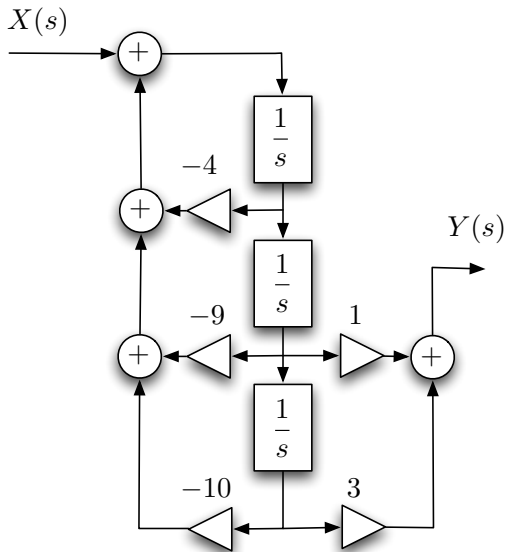
$$H_2(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + 4 \frac{1}{s} + 9 \frac{1}{s^2} + 10 \frac{1}{s^3}}$$



$$W(s) = \frac{X(s)}{s^2} + 3 \frac{X(s)}{s^3} \quad Y(s) = W(s) - 4 \frac{Y(s)}{s} - 9 \frac{Y(s)}{s^2} - 10 \frac{Y(s)}{s^3}$$

Forma Direta II

como $H(s) = H_1(s) H_2(s) = H_2(s) H_1(s)$

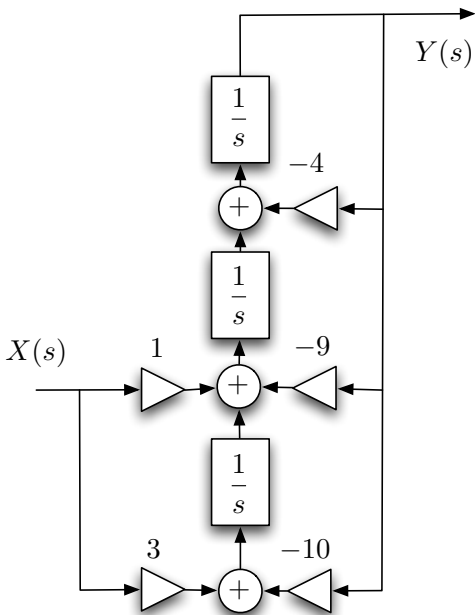


Realização Transposta

Mostra-se que a função de transferência de uma estrutura fica inalterada se o seguinte conjunto de modificações for realizado (transposição):

- a) Inverta a direção de todos os ramos, mantendo os valores dos multiplicadores
- b) Transforme nós de partida de sinais em nós de soma de sinais, e vice-versa
- c) Troque $X(s)$ (entrada) por $Y(s)$ (saída)

No exemplo: $H(s) = \frac{s + 3}{s^3 + 4s^2 + 9s + 10}$



Resposta em Frequencia – Sistemas LIT

- ▶ Sistemas LIT podem ser interpretados como filtros no domínio da frequência

Resposta em Frequencia – Sistemas LIT

- ▶ Sistemas LIT podem ser interpretados como filtros no domínio da frequência
- ▶ Filtros modificam diferentemente sinais senoidais de diferentes frequências

Resposta em Frequencia – Sistemas LIT

- ▶ Sistemas LIT podem ser interpretados como filtros no domínio da frequência
- ▶ Filtros modificam diferentemente sinais senoidais de diferentes frequências
- ▶ Sabemos que

$$x(t) = e^{st} \rightarrow y(t) = H(s) e^{st} \quad [e^{st} \text{ para } (-\infty < t < \infty)]$$

Resposta em Frequencia – Sistemas LIT

- ▶ Sistemas LIT podem ser interpretados como filtros no domínio da frequência
- ▶ Filtros modificam diferentemente sinais senoidais de diferentes frequências
- ▶ Sabemos que

$$x(t) = e^{st} \rightarrow y(t) = H(s) e^{st} \quad [e^{st} \text{ para } (-\infty < t < \infty)]$$

- ▶ Caso particularmente importante (sistemas estáveis)

$$s = j\omega$$

$$x(t) = e^{j\omega t} \rightarrow y(t) = H(j\omega) e^{j\omega t} \quad [\text{regime permanente senoidal}]$$

► Como

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\text{sen}(\omega t)$$

$$x(t) = \cos(\omega t) \rightarrow y(t) = \text{Re}\left\{H(j\omega) e^{j\omega t}\right\}$$

Escrevendo $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta_H(\omega)}$

$$x(t) = \cos(\omega t) \rightarrow y(t) = |H(j\omega)| \cos[\omega t + \theta_H(\omega)]$$

Da mesma forma

$$x(t) = \cos(\omega t + \theta_x) \rightarrow y(t) = |H(j\omega)| \cos[\omega t + \theta_x + \theta_H(\omega)]$$

Observações:

- ▶ $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta_H(\omega)}$ é denominada resposta em frequência do sistema
- ▶ $|H(j\omega)|$ é o ganho introduzido pelo sistema sobre um sinal senoidal de frequência ω
- ▶ $\theta_H(\omega)$ é a defasagem adicionada pelo sistema a um sinal senoidal de frequência ω
- ▶ A resposta em frequência do sistema determina seu comportamento como filtro

Respostas a Sinais Senoidais Causais

- ▶ A resposta terá uma parte transitória (resposta natural) e uma parte correspondente ao regime permanente (resposta forçada)

Respostas a Sinais Senoidais Causais

- ▶ A resposta terá uma parte transitória (resposta natural) e uma parte correspondente ao regime permanente (resposta forçada)
- ▶ A resposta em regime permanente senoidal será determinada por $H(j\omega)$

$$H(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)}$$

$$x(t) = e^{j\omega t} u(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s - j\omega}$$

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)(s - j\omega)}$$

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)(s - j\omega)}$$

Expandindo em frações parciais

$$Y(s) = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{s - p_i} + \frac{k_0}{s - j\omega} = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{s - p_i} + \frac{H(j\omega)}{s - j\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^N k_i e^{p_i t}}_{\text{Resposta transitória}} + \underbrace{|H(j\omega)| e^{j[\omega t + \theta_H(\omega)]}}_{\text{Resp. em Reg. Perm. Senoidal}}$$

Diagramas de Bode e Aproximações por Assíntotas

- ▶ Diagrama de Bode

Gráficos de

$$|H(j\omega)| e^{j\theta_H(\omega)}$$

- ▶ Gráficos de $|H(j\omega)|$ traçados em dB (decibel)

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

- ▶ Escalas das frequências → Logarítmicas

Obs: Gráfico em dB

se

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(j\omega)|_{\text{dB}} + |H_2(j\omega)|_{\text{dB}}$$

se

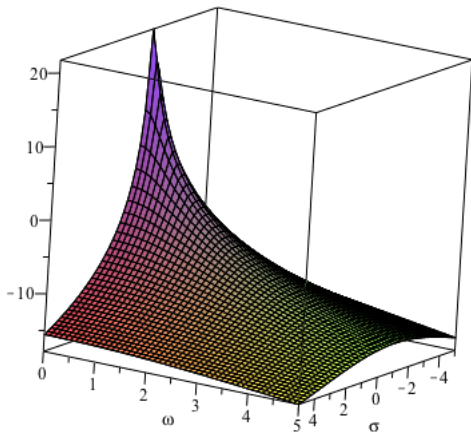
$$H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{H_2(j\omega)}$$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(j\omega)|_{\text{dB}} - |H_2(j\omega)|_{\text{dB}}$$

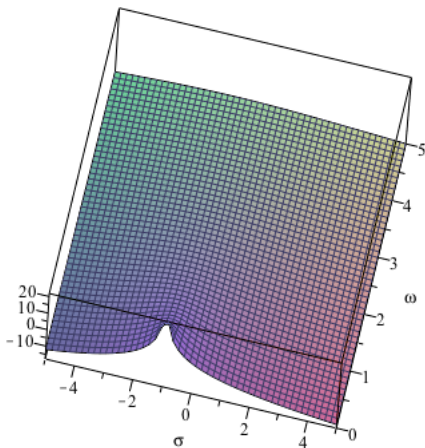
⇒ Facilita traçado e visualização

Exemplo: $H(s) = \frac{1}{s+1} = \frac{1}{1+\sigma+j\omega}$

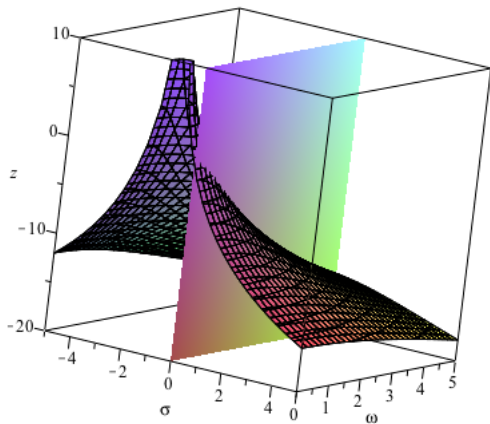
$$|H(s)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{(1+\sigma)^2 + \omega^2}}$$



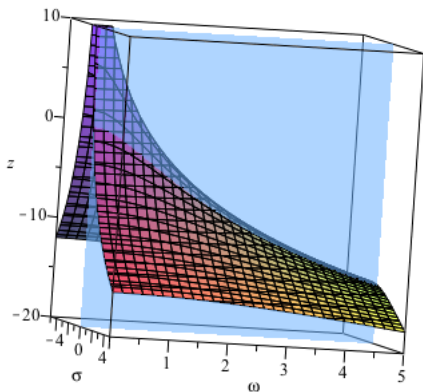
Mesmo gráfico mostrando o polo da função em $\sigma = -1$ e $\omega = 0$



Mesmo gráfico mostrando o plano $\sigma = 0$

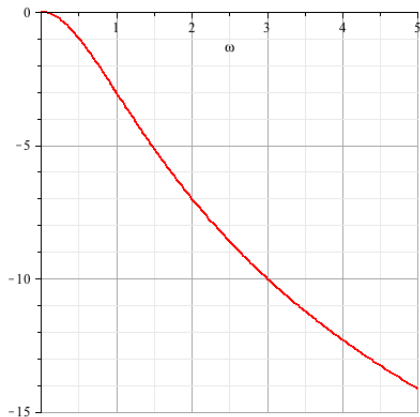
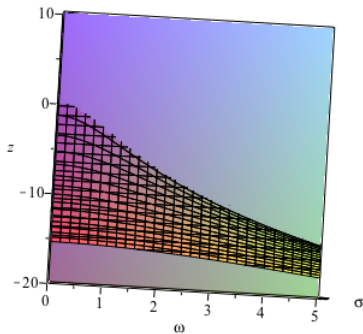


A linha de interseção do plano $\sigma = 0$ com a superfície
é o gráfico de $|H(j\omega)|$



A linha de interseção do plano $\sigma = 0$ com a superfície
é o gráfico de $|H(j\omega)|$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$



▶ Aproximação por Assíntotas

- ▶ Permite traçado aproximado de forma simples
- ▶ Facilita a interpretação da resposta em frequência associada a uma função de transferência
- ▶ Facilita o projeto de sistemas com respostas em frequência desejadas
- ▶ Não se torna dispensável mesmo com acesso a infraestrutura computacional

- ▶ **Aproximação por Assíntotas**
 - ▶ Permite traçado aproximado de forma simples
 - ▶ Facilita a interpretação da resposta em frequência associada a uma função de transferência
 - ▶ Facilita o projeto de sistemas com respostas em frequência desejadas
 - ▶ Não se torna dispensável mesmo com acesso a infraestrutura computacional
- ▶ **Expressão genérica de $H(s)$ contém os seguintes fatores (no numerador ou no denominador)**
 - ▶ a) Constante K
 - ▶ b) Polo ou zero na origem [fator s]
 - ▶ c) Polo ou zero de primeira ordem

$$(s + a)$$

- ▶ d) polo ou zero de segunda ordem (complexo conjugados)

$$(s^2 + b_1s + b_0)$$

Estudo para $\omega \geq 0$

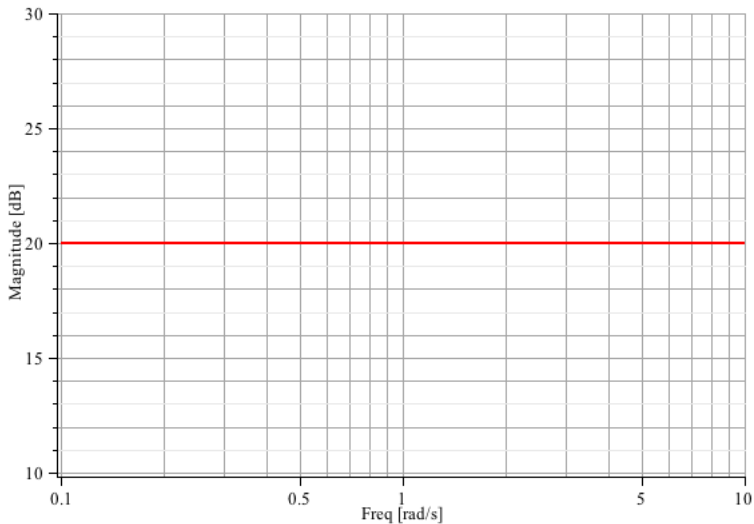
1) Função constante

$$H(s) = K \rightarrow H(j\omega) = K \rightarrow |H(j\omega)| = |K|$$

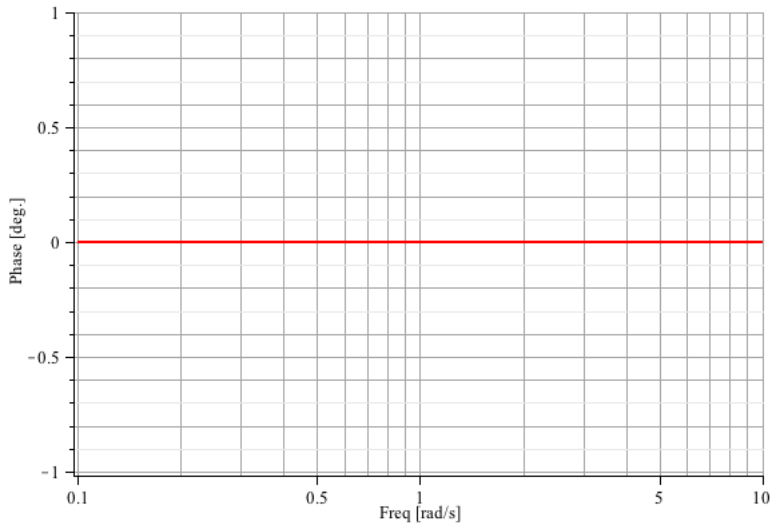
$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |K|$$

$$\theta_H(j\omega) = \begin{cases} 0, & K > 0 \\ \pi, & K < 0 \end{cases}$$

Exemplo: $K = 10$ $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |K| = 20 \text{ dB}$



$$\theta_H(j\omega) = 0$$



2) Polo ou zero na origem

Polo: $H(s) = \frac{1}{s}$

2) Polo ou zero na origem

Polo: $H(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$ Não podemos usar $s = j\omega$

2) Polo ou zero na origem

Polo: $H(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$ Não podemos usar $s = j\omega$

Zero: $H(s) = s \rightarrow H(j\omega) = j\omega$

2) Polo ou zero na origem

Polo: $H(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$ Não podemos usar $s = j\omega$

Zero: $H(s) = s \rightarrow H(j\omega) = j\omega$

$$|H(j\omega)| = \omega \rightarrow |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega$$

+20 dB/(dec) ou + 6,02 dB/ oitava

2) Polo ou zero na origem

Polo: $H(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$ Não podemos usar $s = j\omega$

Zero: $H(s) = s \rightarrow H(j\omega) = j\omega$

$$|H(j\omega)| = \omega \rightarrow |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega$$

+20 dB/(dec) ou + 6,02 dB/ oitava

$$\theta_H(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Obs:

Número de décadas entre ω_1 e ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) $\rightarrow \log_{10} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$

2) Polo ou zero na origem

Polo: $H(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$ Não podemos usar $s = j\omega$

Zero: $H(s) = s \rightarrow H(j\omega) = j\omega$

$$|H(j\omega)| = \omega \rightarrow |H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega$$

+20 dB/(dec) ou + 6,02 dB/ oitava

$$\theta_H(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{0} \right) = \frac{\pi}{2}$$

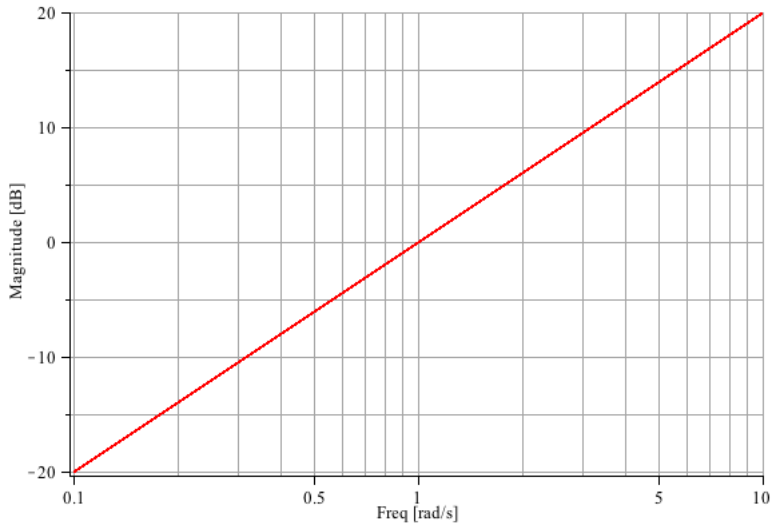
Obs:

Número de décadas entre ω_1 e ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) $\rightarrow \log_{10} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$

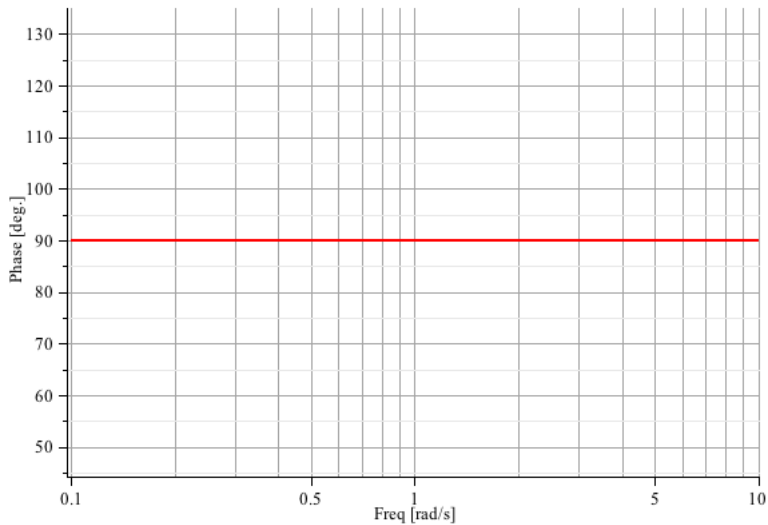
Número de oitavas entre ω_1 e ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$)

$$\log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1}}{\log_{10} 2} \approx 3,32 \log_{10} \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Gráfico: $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \omega$ (+20 dB/dec)



$$\theta_H(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$



3) Polo ou zero real (primeira ordem)

Polo em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$$

3) Polo ou zero real (primeira ordem)

Polo em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{a}\right)} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}}$$

3) Polo ou zero real (primeira ordem)

Polo em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{a}\right)} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}}$$

Magnitude

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \right]$$

3) Polo ou zero real (primeira ordem)

Polo em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{a}\right)} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}}$$

Magnitude

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \right]$$

a) $\omega \ll a$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

3) Polo ou zero real (primeira ordem)

Polo em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{a}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{a}\right)} \rightarrow |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}}$$

Magnitude

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \right]$$

a) $\omega \ll a$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

b) $\omega \gg a$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{a}\right) \leftarrow -20 \text{ dB/década}$$

Gráfico: $H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{10}}$ $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{10} \right)^2 \right]$

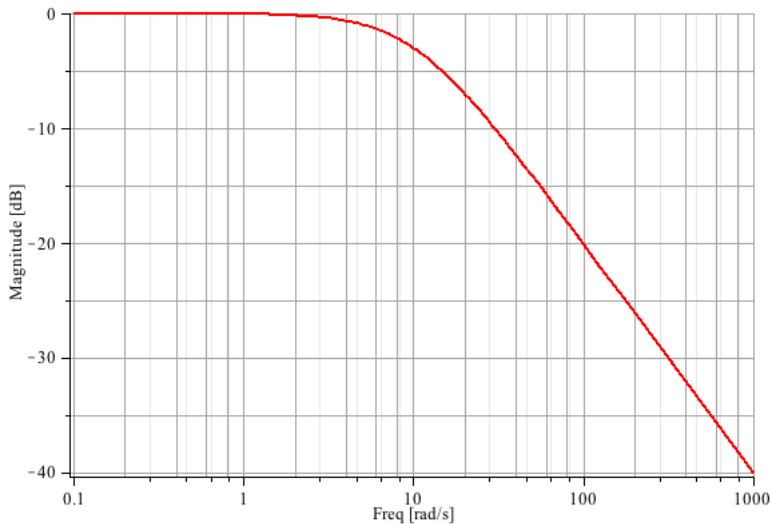
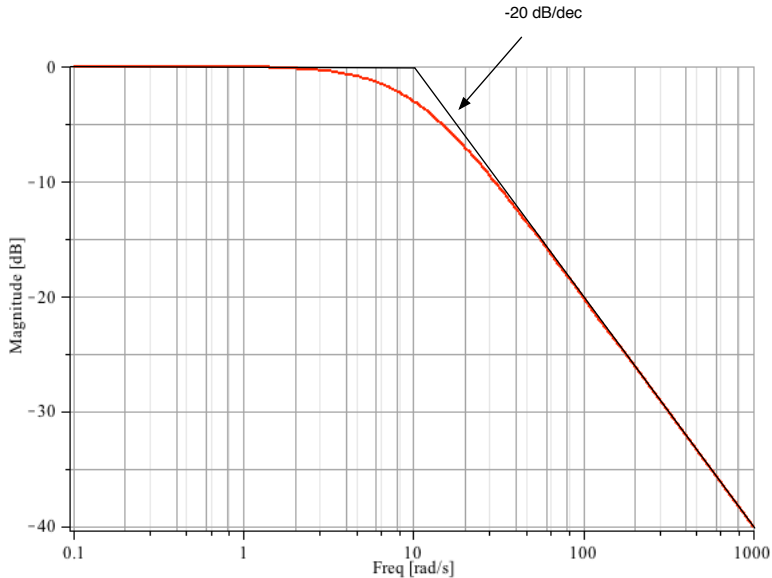


Gráfico + assíntotas: $H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{10}}$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{10} \right)^2 \right]$$



Fase:

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Fase:

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

a) $\omega \ll a$

$$\theta_H(\omega) \approx 0 \text{ rad.}$$

Fase:

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

a) $\omega \ll a$

$$\theta_H(\omega) \approx 0 \text{ rad.}$$

b) $\omega \gg a$

$$\theta_H(\omega) \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

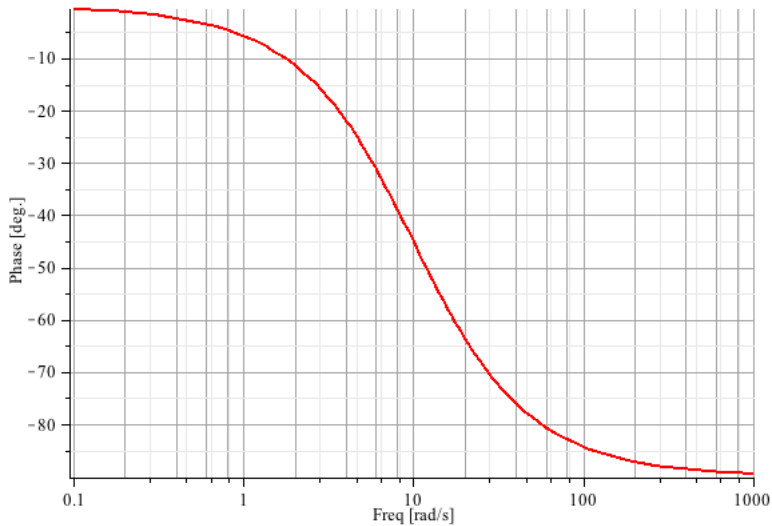
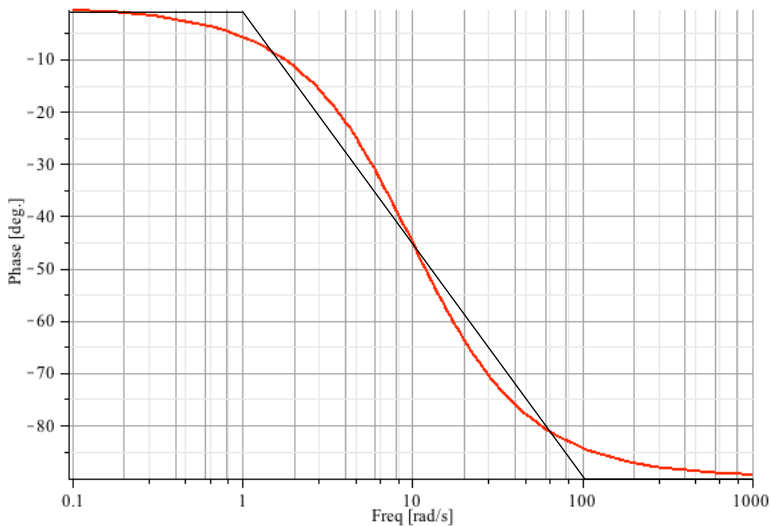


Gráfico + assíntotas:

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$



3) Zero real (primeira ordem)

Zero em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a}$$

3) Zero real (primeira ordem)

Zero em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a}$$

$$H(j\omega) = 1 + j\left(\frac{\omega}{a}\right) \rightarrow |H(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

3) Zero real (primeira ordem)

Zero em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a}$$

$$H(j\omega) = 1 + j \left(\frac{\omega}{a} \right) \rightarrow |H(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2}$$

Magnitude

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right]$$

3) Zero real (primeira ordem)

Zero em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a}$$

$$H(j\omega) = 1 + j \left(\frac{\omega}{a} \right) \rightarrow |H(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2}$$

Magnitude

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right]$$

a) $\omega \ll a$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

3) Zero real (primeira ordem)

Zero em $s = -a$ com normalização para $H(0) = 1$

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a}$$

$$H(j\omega) = 1 + j \left(\frac{\omega}{a} \right) \rightarrow |H(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2}$$

Magnitude

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 \right]$$

a) $\omega \ll a$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

b) $\omega \gg a$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{a} \right) \leftarrow +20 \text{ dB/década}$$

Gráfico: $H(s) = 1 + \frac{s}{10}$ $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{10} \right)^2 \right]$

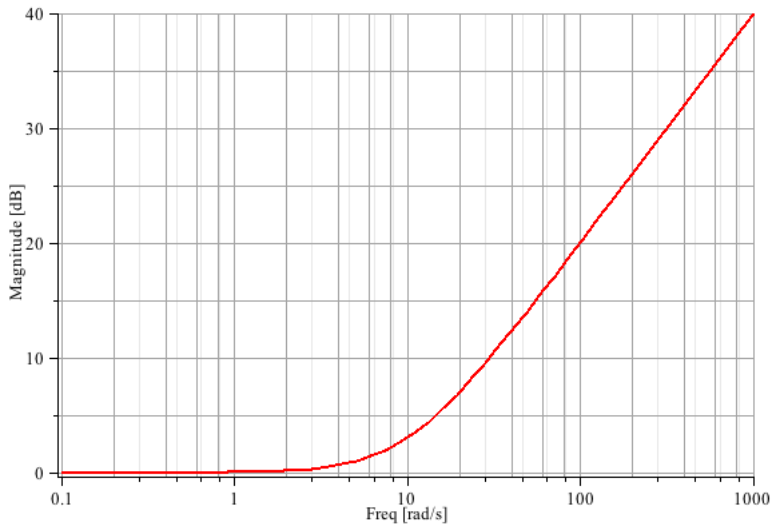
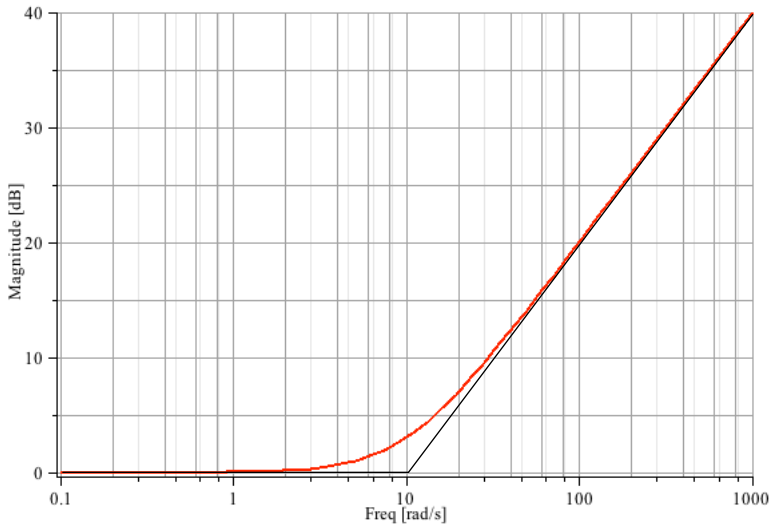


Gráfico + assíntotas: $H(s) = 1 + \frac{s}{10}$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left[1 + \left(\frac{\omega}{10} \right)^2 \right]$$



$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{10} \right)$$

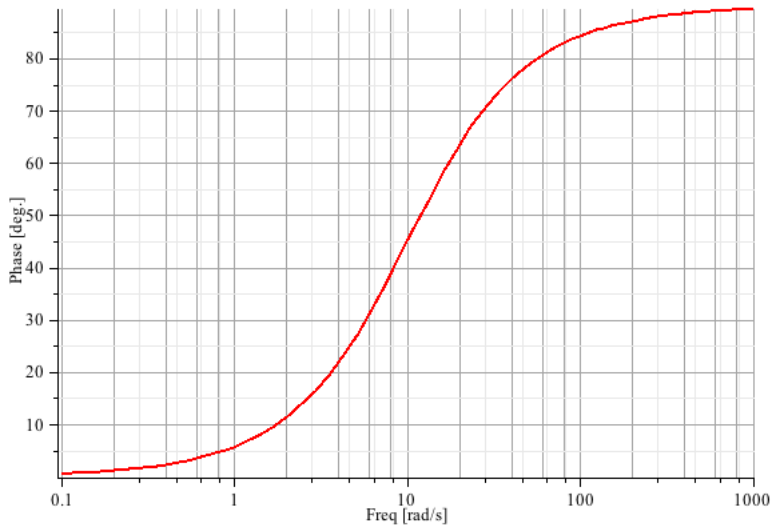
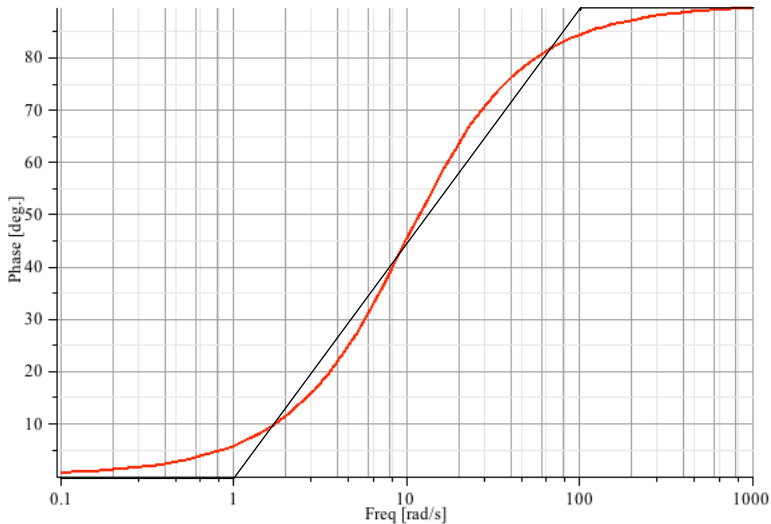


Gráfico + assíntotas:

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{10} \right)$$



Observação - Polos complexo-conjugados

$$H(s) = \frac{K_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{D(s)}$$

$$D(s) = 0 \rightarrow s = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Observação - Polos complexo-conjugados

$$H(s) = \frac{K_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{D(s)}$$

$$D(s) = 0 \rightarrow s = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Sistema causal e estável $\Rightarrow \xi > 0$
polos complexos $\Rightarrow \xi < 1$ } $0 < \xi < 1$

Polos em

$$s = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

O que corresponde a escrever $D(s)$ como

$$D(s) = (s + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)$$

Assim

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{\omega_n (1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}}{(s + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)}$$

Logo

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \text{sen} \left[\left(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \right) t \right] u(t)$$

ξ : fator de amortecimento ω_n : freq natural ou freq ressonância

4) Polo ou zero de 2ª ordem (complexos)

Polos:

$$H(s) = \frac{K_0}{s^2 + b_1 s + b_0}$$

Normalizando para $|H(0)| = 1$ e usando os parâmetros ξ e ω_n

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

Magnitude:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right\}$$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -10 \log_{10} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right\}$$

a) $\omega \ll \omega_n$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

b) $\omega \gg \omega_n$

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx -10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^4 = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad \begin{cases} -40 \text{ dB/década} \\ -12 \text{ dB/oitava} \end{cases}$$

c) $\omega = \omega_n$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{\text{dB}} &= -10 \log_{10}(2\xi)^2 = -20 \log_{10}(2\xi) \\ &\approx -6 \text{ dB} - 20 \log_{10}(\xi) = -6 \text{ dB} + 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\xi}\right) \end{aligned}$$

- ▶ $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$ depende do valor de ξ , ($0 < \xi < 1$)
- ▶ Quanto menor o amortecimento ξ , maior será $|H(j\omega)|$
- ▶ Por ex:

$$\xi = 0.1 \rightarrow |H(j\omega_n)|_{\text{dB}} = 14 \text{ dB} \quad \Rightarrow |H(j\omega_n)| \approx 5$$

Exemplo: $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$, $\omega_n = 10$ rad/s, $\xi = 0.1$

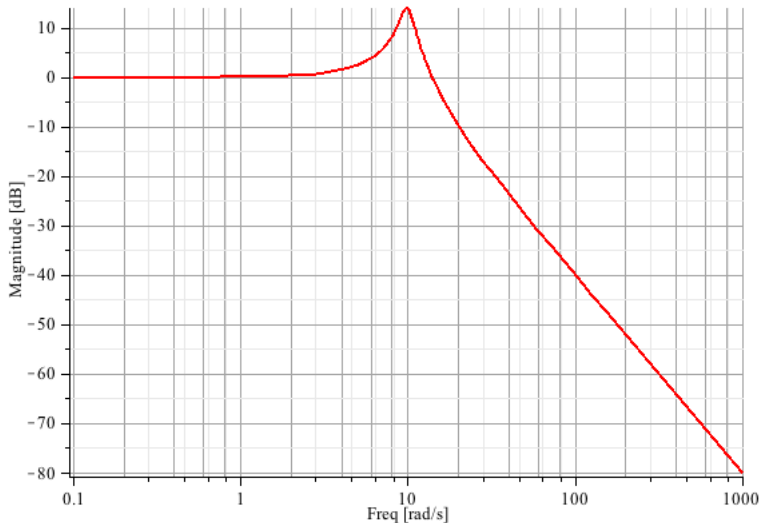
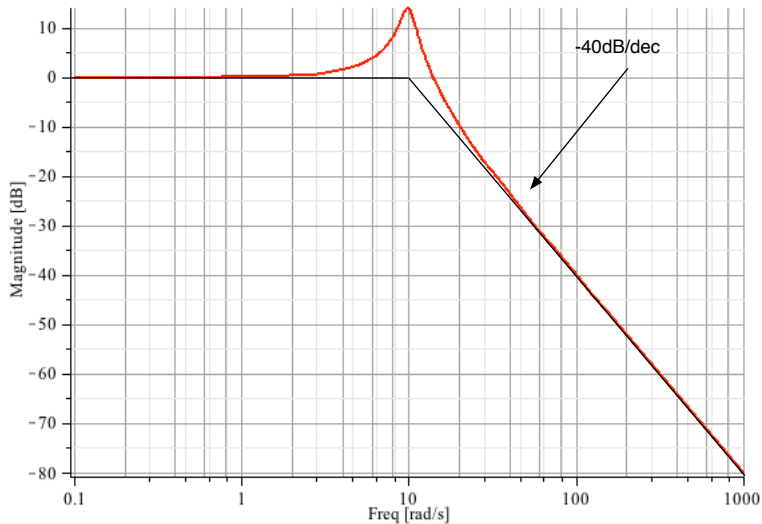


Gráfico + assíntotas:



Fase:

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

a) $\omega \ll \omega_n$

$$\theta_H(\omega) \approx 0 \text{ rad}$$

b) $\omega \gg \omega_n$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{-2\xi\omega_n}{\omega} \right], \quad \omega \rightarrow \infty$$

Como

$$\frac{2\xi\omega_n}{\omega} > 0 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \theta_H(\omega) = -\tan^{-1}(\phi)$$

em que ϕ é um valor que tende a zero "vindo de $\phi < 0$ "

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\omega \rightarrow \infty} \theta_H(\omega) = -\pi \text{ rad}}$$

c) Em $\omega = \omega_n$

$$\theta_H(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

d) Comportamento de $\theta_H(\omega)$ no entorno de $\omega = \omega_n$

$$\frac{d\theta_H(\omega)}{d\omega} = -\frac{\frac{2\xi}{\omega_n} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

Fazendo $\omega = \omega_n$

$$\boxed{\left. \frac{d\theta_H(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi\omega_n}}$$

$$\left. \frac{d\theta_H(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi\omega_n}$$

Quanto menor a magnitude da parte real dos polos ($\xi\omega_n$), maior será a magnitude da derivada de $\theta_H(\omega)$ em $\omega = \omega_n$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1} \left\{ \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right] / \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] \right\}$$

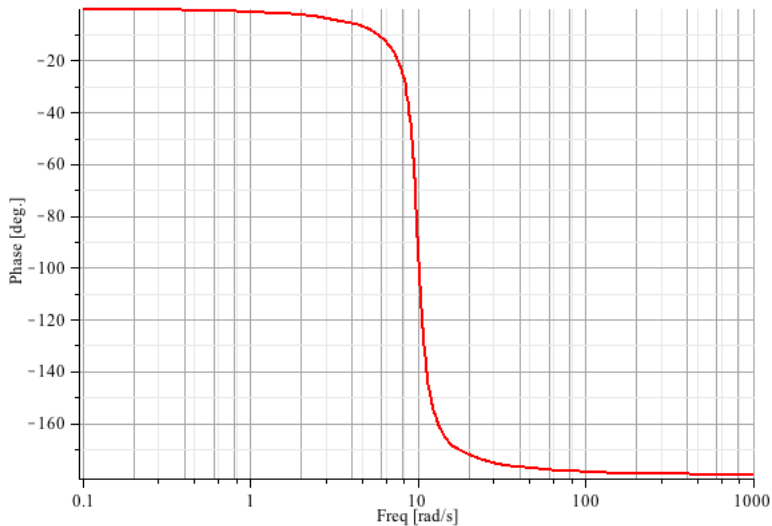


Gráfico + assíntotas:

